



Тема: Ймовірність події

Мета:

- *Навчальна:* закріпити та поглиби отримані раніше знання про види подій, відносну частоту події, ймовірність подій; навчитися застосовувати правила комбінаторики до розв'язування задач на відшукування ймовірності події;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння правильно користуватися класичним означенням ймовірності події, правильно шукати кількість сприятливих та загальних подій під час знаходження ймовірності випадкової події;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук;

Компетенції:

- математичні
- комунікативні

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Поясніть, що таке перестановки. Наведіть приклади перестановок
- За якою формулою можна обчислити кількість перестановок із n елементів?
- Поясніть, чим відрізняються розміщення від комбінацій?
- За якою формулою можна обчислити кількість розміщень із n елементів по k елементів?
- За якою формулою можна обчислити кількість комбінацій із n елементів по k елементів?



III. Вивчення нового матеріалу

**Учні вже знайомі з основами теорії ймовірностей з 9-го класу. Пригадаємо та поглибимо знання учнів з основ теорії ймовірностей.*

• Випадковий дослід. Випадкова, неможлива та вірогідна події.

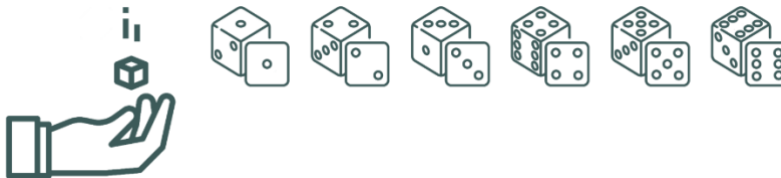
- Як можемо назвати дію підкидання гральних кубиків?



(Випадковий дослід)

Випадковий дослід – це дослід (або спостереження, випробування чи експеримент(сукупність дослідів)), результат якого залежить від випадку і який можна повторити необхідну кількість разів в одних і тих самих умовах.

- Як можемо назвати результат такого досліді?



(Випадкова подія)

Випадкова подія – це подія, яка за одних і тих самих умов може відбутися або не відбутися. Випадкові події позначаються великим латинськими літерами $A, B, C, D \dots$

- Чи існують інші події?
(Учні висловлюють власну думку)
- Як можемо назвати такі події?
(Наводяться приклади неможливих подій)

Випало число
 $m \geq 7$

Випало число
 $a < 1$



(Неможливі події)

Неможлива подія – це подія, яка в результаті досліді статися не може.



- Як можемо назвати такі події?
(Наводяться приклади вірогідних подій)



Випало число
 $t \leq 6$

Випало число
 $h \geq 1$

(Вірогідні події)

Вірогідна подія – це подія, яка в результаті досліду обов’язково станеться.

• Відносна частота події



$$n(B) = 2$$



A

B

C

B

D

- Нехай ми провели дослід з підкидання грального кубика, в результаті якого трапилися наступні події:

A – випало число 4;

B – випало число 3;

C – випало число 1;

B – випало число 3;

D – випало число 2;

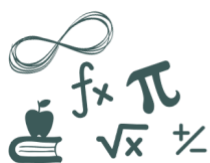
Загальна кількість подій $n = 5$;

Частота події B = 2;

- Як знайти відносну частоту події B?

(Для знаходження відносної частоти події необхідно поділити $n(B)$ (частоту події B) на загальну кількість випадкових подій n)

$$\frac{n(B)}{n} = \frac{2}{5} - \text{відносна частота події B}$$



- **Статистична ймовірність**

- Чи буде змінюватися відносна частота події із зміною кількості дослідів?

Розглянемо дослід з підкидання монети, в результаті якого трапляється подія M – випадання аверса(лицьової сторони монети), який проводили вчені у різні роки:

№	Дослідник	Роки життя	Кількість підкидання монети, n	Кількість випадання аверса, $n(A)$	Відносна частота
1.	Ж. Бюффон	1707-1788	4040	2048	0,5069
2.	Де Морган	1806-1871	4092	2048	0,5005
3.	У. Джевонс	1835-1882	20 480	10 379	0,5068
4.	К. Пірсон	1857-1936	24 000	12 012	0,5005
5.	В. Романовський	1879-1954	80 640	40 151	0,4979
6.	В. Феллер	1906-1970	10 000	4979	0,4979

Статистичною ймовірністю події називається число, близько якого коливається відносна частота події за умови великої кількості дослідів.

Отже, можемо зробити висновок, що чим більша кількість проведених експериментів, тим менша різниця між відносною частотою та ймовірністю події.

Проблемне питання:

- Чи можемо знайти ймовірність подій не виконуючи дослідів, випробувань чи спостережень?
(Так, достатньо просто керуватися здоровим глуздом та життєвим досвідом – у цьому нам допоможе класичне означення ймовірності випадкової події)



• Простір елементарних подій

- Що ми маємо на увазі, коли говоримо про модель правильного грального кубика?

Такий кубик має наступні властивості:

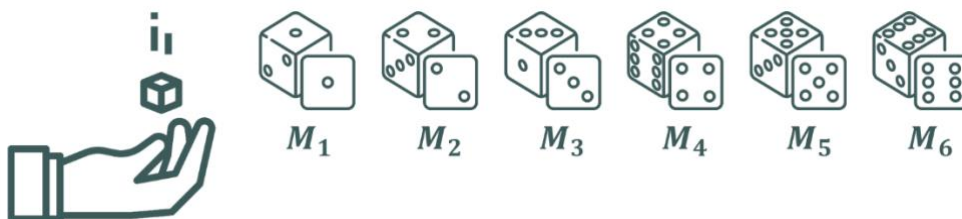
- Всі грані мають однакову площу, однаково гладенькі і однаково плоскі;
- Кубик має кубічну форму, центр ваги збігається з геометричним центром;
- Вершини та ребра мають однакову форму (якщо мають округлення, то ці округлення ідеально однакові);
- Отвори, що маркують кількість очок, просвердлені на однакову глибину;
- Сума очок на протилежних гранях дорівнює 7;

- Що ми маємо на увазі, коли говоримо про модель правильного математичного грального кубика?

Такий кубик має наступні властивості:

- Математичний образ правильного грального кубика;
- Математичний кубик завжди падає однією стороною вгору;
- Випадання всіх граней рівноможливе, ніякий інший результат неможливий;
- Не може загубитися, закотитися у куток чи ще щось інше;
- Математичний кубик не має кольору, розміру, ваги та інших матеріальних якостей;

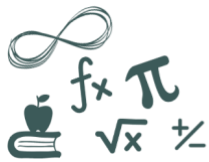
- Що можемо сказати про ці події?



*(Так як кожна подія цього експерименту не може відбутися переважніше будь-якої іншої, то такі події називаються **рівноможливими**.*

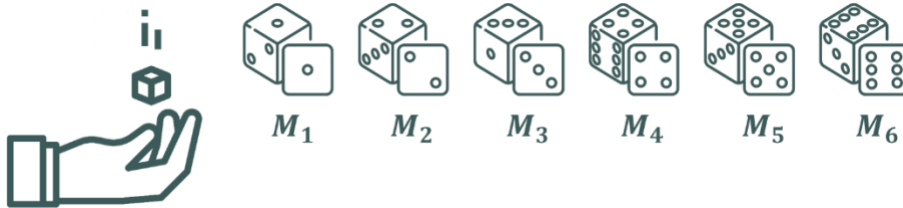
*Також будь-яка подія не може відбутися одночасно з іншою, отже ці події **несумісні**.)*

Множина $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$ називається **простором елементарних подій**.



- Спробуйте сформулювати означення простору елементарних подій
(Якщо результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних рівноможливих елементарних подій $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, то простором елементарних подій називається множина всіх цих подій $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$)

- **Класичне означення ймовірності випадкової події**



Нехай ми підкидаємо гральний кубик, маємо простір попарно несумісних і рівноможливих елементарних подій $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\}$.

- Якою є ймовірність того, що внаслідок підкидання грального кубика випаде 5 очок?
 1. Під час випробування можемо отримати $m = 1$ **сприятливих** (події, що сприяють випаданню 5 очок) випадків.
 2. Загальна кількість рівноможливих випадків $n = 6$
 3. Тоді керуючись здоровим глуздом, ймовірність події випадання 5 очок можна обчислити за формулою $P(M_5) = \frac{m}{n}$

$$\text{Отже, } P(M_5) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

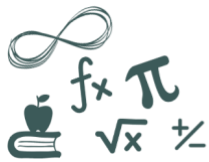
*Учні вже вивчали означення ймовірності у 9-му класі

- Спробуйте сформулювати вивчене раніше класичне означення ймовірності

Якщо розглядаємо простір рівноможливих елементарних подій, то **ймовірність події M** – це відношення числа сприятливих для неї випадків (m) до числа всіх рівноможливих елементарних випадків (n) у даному експерименті:

$$P(M) = \frac{m}{n}$$

- Яка ймовірність неможливої події?
(Так як не існує подій, що сприяють появі неможливої події – ймовірність неможливої події дорівнює нулю; $P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$)



- Яка ймовірність вірогідної події?
(Так як появи вірогідної події N сприяють всі можливі елементарні події ($m = n$) – ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці; $P(N) = \frac{n}{n} = 1$)
- Яка ймовірність того, що випаде парне число очок?
(Сприятливими для такої події S є 3 елементарні події: 2, 4, і 6 очок. Отже, ймовірність такої події дорівнює: $P(S) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$)

• Розв'язування задач на підрахунок імовірностей

Для розв'язування задач на підрахунок імовірностей необхідно завжди правильно оцінювати кількість рівноможливих випадків та всіх можливих випадків. Розв'язування таких задач часто потребує застосування правил комбінаторики. Розглянемо декілька елементарних задач, які мають певний підступ та можливо не правильне розуміння умови.

№1

На екзамені буде 20 білетів. Ви не вивчили 2 з усіх білетів. Яка є ймовірність, що Вам попадеться вивчений білет?

Розв'язок:

Так як учень не вивчив тільки 2 білети, то кількість вивчених білетів дорівнює: $20 - 2 = 18$

Отже, згідно з класичним означенням ймовірності:

$$P = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0,9$$

Відповідь: 0,9

№2

На конкурс-захист науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук приїхали 20 учнів: 8 з Дурмстрангу, 7 з Шармбатону, решта з Хогвартсу. Порядок захисту робіт визначають жеребкуванням. Яка ймовірність, що 5-м буде виступати учень з Хогвартсу?

Розв'язок:

Кількість учнів з Хогвартсу: $20 - 8 - 7 = 5$

Так як порядок захисту визначається жеребкуванням, то шанс бути першим такий самий як і шанс бути останнім. Тобто нас не цікавить яким по черзі буде учень, нас цікавить – скільки учнів *сприяють* цій події, таких учнів 5. Отже:

$$P = \frac{5}{20} = 0,25$$

Відповідь: 0,25



В мішку є кульки з номерами від 4 до 43 включно. Яка ймовірність, що витягнута навмання кулька буде мати двозначне число?

Розв'язок:

- Скільки кульок в мішку?

~~1,2,3~~, 4, ... 43

$43 - 3 = 40$ кульок в мішку

- Скільки кульок сприяють нашій події?

~~1,2,3,4,5,6,7,8,9~~, 10 ... 43

$43 - 9 = 34$ кульки сприяють нашій події

Отже:

$$P = \frac{34}{40} = 0,85$$

Відповідь: 0,85

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Ймовірність купити бракований електропривод дорівнює 0,007. Чи правильно, що в будь-якій партії із 1000 електроприладів є 7 бракованих?

Розв'язок:

Ні, так як існує ймовірність 0,993 (майже один), що придбаний електропривід буде не бракованим.

Відповідь: ні.

№2

У шухляді лежать 8 синіх і 12 червоних олівців. Яка ймовірність взяти навмання з шухляди:

1) Ручку

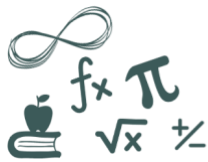
2) Олівець

Розв'язок:

Так як дістання ручки – неможлива подія, її ймовірність дорівнює нулю.

Так як дістання олівця – вірогідна подія, її ймовірність дорівнює одиниці.

Відповідь: 1) 0; 2) 1;



Із цифр 2,4,6,8 утворюють трицифрове число. Яка ймовірність того, що це число буде ділитися націло:

1) На 5

2) На 2

Розв'язок:

Так як серед цифр 2,4,6,8 немає цифр 0 і 5 – утворене число не може ділитися на 5, то ймовірність такої події неможлива.

Так як всі цифри 2,4,6,8 парні – утворене число обов'язково буде ділитися на 2, тому ймовірність такої події вірогідна.

Відповідь: 1) 0; 2) 1;

№4

З множини {1,2,3,4,5,6,7,8,9} навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число:

1) Дорівнює 2

2) Не ділиться націло на 3

3) Є парним

Розв'язок:

1) Кількість сприятливих подій: 1

Загальна кількість подій: 9

$$P = \frac{1}{9}$$

2) Кількість сприятливих подій: 6

Загальна кількість подій: 9

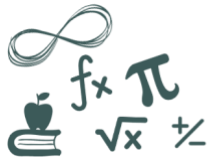
$$P = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

3) Кількість сприятливих подій: 4

Загальна кількість подій: 9

$$P = \frac{4}{9}$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{9}$;



У коробці було 17 карток, пронумерованих числами від 1 до 17. Із коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:

1) 12

2) Не кратне 5

3) Двоцифрове

Розв'язок:

1) Кількість сприятливих подій: 1

Загальна кількість подій: 17

$$P = \frac{1}{17}$$

2) Кількість сприятливих подій: 14

Загальна кількість подій: 17

$$P = \frac{14}{17}$$

3) Кількість сприятливих подій: 8

Загальна кількість подій: 17

$$P = \frac{8}{17}$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{17}$; 2) $\frac{14}{17}$; 3) $\frac{8}{17}$;

У коробці лежить a синіх, b жовтих і c червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться:

1) Жовтою

2) Не червоною

3) Синьою

Розв'язок:

1) Кількість сприятливих подій: b

Загальна кількість подій: $a + b + c$

$$P = \frac{b}{a + b + c}$$

2) Кількість сприятливих подій: $a + b$

Загальна кількість подій: $a + b + c$

$$P = \frac{a + b}{a + b + c}$$

3) Кількість сприятливих подій: a

Загальна кількість подій: $a + b + c$



$$P = \frac{a}{a + b + c}$$

Відповідь: 1) $\frac{b}{a+b+c}$; 2) $\frac{a+b}{a+b+c}$; 3) $\frac{a}{a+b+c}$

№7

На полиці лежать 12 зошитів, з яких 5 у клітинку. Яка ймовірність того, що вибрані навмання 2 зошити будуть у клітинку?

Розв'язок:

Перший зошит можна обрати 12 способами, другий – 11. За правилом добутку маємо $12 \cdot 11 = 132$

Перший зошит у клітинку можемо обрати 5 способами, другий – 4. За правилами добутку маємо $4 \cdot 5 = 20$ способів.

Отже:

$$P = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 11} = \frac{5}{33}$$

Відповідь: $\frac{5}{33}$

№8

У шухляді лежать олівці та ручки. Відомо, що олівців на 12 штук менше, ніж ручок. Скільки олівців лежить у шухляді, якщо ймовірність того, що вибраний навмання предмет:

1) є ручкою, дорівнює $\frac{5}{8}$

2) є олівцем, дорівнює $\frac{1}{8}$

Розв'язок:

1) Так як нам не відомо скільки олівців у шухляді – нехай їх там буде x , тоді ручок – $x + 12$;

Отже, олівців та ручок в шухляді – $x + x + 12 = 2x + 12$

S – подія, витягнутий предмет – ручка.

Кількість сприятливих подій тому, що буде витягнута ручка дорівнює: $x + 12$;

Загальна кількість подій: $2x + 12$;

Отже:

$$P(S) = \frac{x + 12}{2x + 12} \quad \left| \begin{array}{l} \text{за} \\ \text{умовою} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{x + 12}{2x + 12} = \frac{5}{8}$$



$$\begin{aligned}\frac{x + 12}{2x + 12} &= \frac{5}{8} \\ 8x + 96 &= 10x + 60 \\ 2x &= 36 \\ x &= 18\end{aligned}$$

Отже, у шухляді було 18 ручок.

- 2) Так як нам не відомо скільки олівців у шухляді – нехай їх там буде x , тоді ручок – $x + 12$;
Отже, олівців та ручок в шухляді – $x + x + 12 = 2x + 12$

T – подія, витягнутий предмет – олівець.
Кількість сприятливих подій тому, що буде витягнутий олівець дорівнює x ;
Загальна кількість подій: $2x + 12$;

Отже:

$$\left. \begin{aligned} P(T) &= \frac{x}{2x + 12} \\ P(T) &= \frac{1}{8} \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{x}{2x + 12} = \frac{1}{8}$$

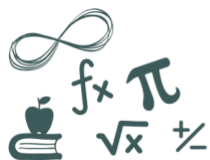
$$\begin{aligned}\frac{x}{2x + 12} &= \frac{1}{8} \\ 8x &= 2x + 12 \\ 6x &= 12 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Отже, у шухляді було 2 олівця;

Відповідь: 1) 18; 2) 2;

V. Підсумок уроку

- Поясніть, які події називаються рівноможливими, вірогідними, неможливими. Наведіть приклад.
- Що таке відносна частота події?
- Як знайти ймовірність події не виконуючи 20 000 дослідів?
- Що ми називаємо простором елементарних подій?
- Поясніть зміст класичного означення ймовірності.



VI. Домашнє завдання

Опрацювати §3, п.14 (ст.78-80) Виконати № 14.7; 14.10; 14.12; 14.14; 14.18	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §15-16 Виконати № 15.5; 15.12; 16.6; 16.10; 16.16; 16.20; 16.38	Істер О.С.
Опрацювати §9 Виконати № 9.4; 9.8; 9.11; 9.15; 9.18; 9.26	Нелін Є.П.
Опрацювати §14 Виконати № 515; 520; 525; 530; 536	Бевз Г.П.